

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ #1

1) ΝΔΟ $1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$ {για $n=0$ προφανές}
ΛΥΣΗ

Έστω η παραπάνω πρόταση $P(n)$ (Μαθηματική Έκφραση)

• Για $n=1$, $P(1)$ αληθής (αφού $1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1$ λοχαί)
 (για $n=2$, $P(2)$ αληθής (αφού $1+3 = \frac{2(2+1)(2+2)}{6} = 4$ λοχαί)

• Έστω ότι η $P(k)$ αληθής και θα δείξουμε σε η πρόταση αληθεύει και για $n=k+1$ (δηλ. $P(k+1)$ αληθής)

λοχαί εξυποθέτουμε ότι:

$$1+3+6+\dots+\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}, \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

και θαό

$$1+3+6+\dots+\frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Το αθροισμα:

$$1+3+6+\dots+\frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \stackrel{(1)}{=}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Άρα, $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

2) ΝΔΟ $9 \mid 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5, \forall n \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

Μέσω μαθηματικής επαγωγής για την παραπάνω πρόταση ($P(n)$), ετεδείχουμε την παρακάτω διαδοχικά

• Για $n=0$, $9 \mid 10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 6 + 3 \cdot 16 = 54 = 9 \cdot 6$

Άρα, η πρόταση $P(0)$ αληθεύει.

• Έστω ότι $P(k)$ αληθής και θαό $P(k+1)$ αληθής

λοχαί, απουπόθεση:

$$9 \mid 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Z}) : (10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5) = 9 \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^k = 9k - 3 \cdot 4^{k+2} - 5 \quad (1)$$

$$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 = 10 \cdot 10^k + 3 \cdot 4 \cdot 4^{k+2} + 5 =$$

$$\stackrel{(1)}{=} 10 \cdot (9k - 3 \cdot 4^{k+2} - 5) + 12 \cdot 4^{k+2} + 5 =$$

$$= 10 \cdot 9k - 30 \cdot 4^{k+2} - 50 + 12 \cdot 4^{k+2} + 5 =$$

$$= 10 \cdot 9k - 18 \cdot 4^{k+2} - 45 =$$

$$= 9 \cdot (\underbrace{10k - 2 \cdot 4^{k+2} - 5}_{k \in \mathbb{Z}}) = 9 \cdot k, \quad 25 \times 10^4$$

Ара, n нэгдсэн $P(n)$ алгуур, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Υπόθεση: κάθε $M \subseteq \mathbb{N}$ με $M \neq \emptyset$ έχει ελάχιστο στοιχείο
Λήμμα: Αν $M \subseteq \mathbb{N} : 1 \in M$ και $\forall n \in M \Rightarrow n+1 \in M$
 τότε $M = \mathbb{N}^*$

Υποθέτουμε ότι το $M \neq \mathbb{N}^*$. Άρα, το $L = \mathbb{N}^* - M$ θα είναι $\neq \emptyset$. Το L έχει τα στοιχεία του $\mathbb{N}^*$ τα οποία δεν ανήκουν στο M . Επειδή, $L \neq \emptyset$ και $L \subseteq \mathbb{N}^*$ το L έχει ελάχιστο το λ

$$1 < \lambda \Rightarrow 1 \leq \lambda - 1 < \lambda \Rightarrow \lambda - 1 \in M \xrightarrow{\text{πρόσ}} (\lambda - 1) + 1 \in M \Rightarrow \lambda \in M \text{ και } \lambda \in \mathbb{N}^* - M \text{ άτοπο!}$$

$$\text{Άρα } L = \emptyset \Rightarrow M = \mathbb{N}^*$$

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$, ορίζεται με βάση τρεις "ισχυρές" αρχές

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής $\Leftrightarrow$ Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής $\Leftrightarrow$ Αρχή της καλής διατάξης (CANE $\Leftrightarrow$ AINE $\Leftrightarrow$ AKΔ).

4) α) ΝΑΟ το γνωμένο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το 3.

β) Αν $x, y \in \mathbb{Z}$ και $2 \nmid x \cdot y$, τότε νδo
 $2 \mid x^2 + y^2$ και $4 \nmid x^2 + y^2$

γ) ΝΑΟ κάθε φυσικός αζo είναι τis μορφis
 2^n ή $2^n(2k+1)$, $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}^*$

δ) ΝΑΟ το γνωμένο r διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το r

ΛΥΣΗ

α) Έστω οι ακεραίοι αριθμοί

$a-1, a, a+1$ οι οποίοι είναι διαδοχικοί

και οδo:

$$3 \mid (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \Leftrightarrow 3 \mid a^3 - a$$

Η Ευκλείδεια Διάρpου του a με το 3 ορίεται ως εξis

$$a = 3k + u, \quad 0 \leq u < 3$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } a^3 - a &= (3k+u)^3 - (3k+u) = \\ &= 27k^3 + 27k^2u + 9ku^2 + u^3 - 3k - u = \\ &= 3(\underbrace{9k^3 + 3k^2u + 3ku^2 - k}_{\lambda \in \mathbb{Z}}) + u^3 - u = \end{aligned}$$

$$= 3\lambda + (u^3 - u) = \begin{cases} 3\lambda, & u=0 \\ 3\lambda, & u=1 \\ 3\lambda+6, & u=2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Άρα, παραπαίit οy} \\ a^3 - a = 3 \cdot h, h \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\beta) 2 \nmid x \cdot y \rightarrow 2 \nmid x \text{ και } 2 \nmid y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2k + \textcircled{1} \xrightarrow{\text{δίνu } 0 < u < 2} \text{ και } y = 2\lambda + \textcircled{1}, \quad \forall k, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως, } x^2 + y^2 &= (2k+1)^2 + (2\lambda+1)^2 = \\ &= 4k^2 + 4\lambda^2 + 4k + 4\lambda + 1 + 1 = \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 2\lambda^2 + 2k + 2\lambda + 1}_a) = 2a, \quad a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Ενώ, } x^2 + y^2 = 4(\underbrace{k^2 + \lambda^2 + k + \lambda}_\beta) + 2 = 4\beta + 2, \quad \beta \in \mathbb{Z}$$

Άτω, θα πει οy το $x^2 + y^2$ διαιρείται με το 4
 δίνu υπόλοιπο $2 \neq 0$ οπότε $4 \nmid x^2 + y^2$

γ) Έστω $a, a+1, \dots, a+r-1$ διαδοχικοί άρρητοι
όπου $a \in \mathbb{Z}$.

$$\text{ΘΔΟ } r \mid a(a+1) \dots (a+r-1)$$

Από ευκλείδεια διαίρεση; Έστω:

$$a = rk + u, \quad 0 \leq u < r, \quad k, u \in \mathbb{Z}$$

- για $u=0$, τότε $a = r \cdot k$ και έτσι, έχουμε:

$$r \mid r \cdot k \cdot (a+1) \dots (a+r-1)$$

- για $u=1$, τότε $a = rk+1$ και έτσι, έχουμε:

$$a(a+1) \dots (rk+1+r-1) = a(a+1) \dots r(k+1)$$

$$\text{όπου πάλι } r \mid a(a+1) \dots r(k+1)$$

⋮

- για $u=r-1$, τότε $a = rk+r-1$, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} a(a+1) \dots (a+r-1) &= a \cdot (rk+r-1+1) \dots (a+r-1) = \\ &= a \cdot (rk+r) \dots (a+r-1) = r \cdot a(k+1) \dots (a+r-1) \end{aligned}$$

$$\text{δυσλ. } r \mid r \cdot a(k+1) \dots (a+r-1)$$

Άρα, το αποδείξαμε για καθένα από τις περιπτώσεις

4) γ . P' -power

$$(k+1)(k+2)(k+3) \cdots (k+v)$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k(k+1) \cdots (k+v)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} = \frac{(k+v)!}{(k+v-v)!} = M(k+v, v)$$

Apkai vdo $v \mid M(k+v, v)$

$$\binom{v+k}{v} = \frac{M(k+v, v)}{v!} \Rightarrow v! \mid M(k+v, v)$$

δ. Διαγράφουμε τον a με το $2 \begin{matrix} \xrightarrow{\text{oxi}} \\ \searrow \text{nah} \end{matrix}$ Άρα είναι περιττός $a = 2k+1$

Άρα, είναι άρτιος $a = 2a_1$

Διαγράφουμε τον a_1 με το $2 \begin{matrix} \xrightarrow{\text{oxi}} \\ \searrow \text{nah} \end{matrix}$ Άρα, $2(2k+1)$

Άρα, $a = 2 \cdot 2a_2$

Διαγράφουμε τον a_2 με το $2 \begin{matrix} \xrightarrow{\text{oxi}} \\ \searrow \text{nah} \end{matrix}$ Άρα, $a = 2 \cdot 2(2k+1)$

Άρα, $a = 2 \cdot 2 \cdot 2a_3$

Συνέχεια μέχρι να φθάσουμε σε περιττό ή τυ μοναδά

Όταν φθάσουμε σε περιττό θα έχουμε $a = 2^4 \cdot (2k+1)$

αλλιώς αν φθάσουμε σε άρτιο θα έχουμε $a = 2^4 \cdot 1 = 2^4$

5α) Έστω $n \neq 2^k$. Άρα, από το προηγούμενο

$$n = 2^k(2\lambda+1) \text{ . Τότε } 2^{n+1} = (2^{2^k})^{2\lambda+1} + 1^{2\lambda+1} =$$

$$= \underbrace{(2^{2^k} + 1) \left((2^{2^k})^{2\lambda} - (2^{2^k})^{2\lambda-1} + \dots + 1 \right)}$$

γινόμενο (oxi πρwtos)

Άρα no

5) β) Μένω τής αντιμεταθετικότητας ΕΔΟ

■ Εάν ο n όχι πρώτος (Δηλ. σωθετός) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n - 1$ όχι πρώτος (Δηλ. σωθετός) ■

Εστω ο n σωθετός $\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{Z}) : n = p \cdot q, p, q \neq 0, \pm 1$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \bullet 2^n - 1 &= 2^{p \cdot q} - 1 = (2^p)^q - 1 = \\ &= (2^p - 1) \cdot ((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1) = \\ &= (2 - 1) \cdot (2^{p-1} + 2^{p-2} + \dots + 2 + 1) \cdot ((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1) = \\ &= (2^{p-1} + 2^{p-2} + \dots + 3) \cdot ((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1) = \\ &= k \cdot \lambda, \quad k, \lambda \in \mathbb{Z} \quad \text{Άρα, ο } 2^n - 1 \text{ σωθετός} \end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ (ΚΑΝΟΝ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ)

κάθε φυσικός γραφεται μοναδικά σαν γινόμενο πρώτων

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} \text{ με } 1 < p_1 < \dots < p_n \text{ πρώτοι}$$

$$\text{και } k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$$

Απόδειξη

Αν a πρώτος, τότε $a = a'$ ισχύει. Αν a σύνθετος, τότε

τότε $a = b \cdot c$ με $b, c > 1$. Από ισχυρή μαθηματική επαγωγή

επειδή $b, c < a$ έχουμε $b = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, $c = q_1^{k'_1} \cdot \dots \cdot q_r^{k'_r}$

όπου $p_1 < \dots < p_n$ και $q_1 < \dots < q_r$ πρώτοι αριθμοί

Δεν είναι απαραίτητα $p_i \neq q_j$

π.χ

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 18$$

$$4 = 2^2 \quad 9 = 3^2$$

$$2 \neq 3$$

$$2' \text{ και } 18 = 2' \cdot 3^2$$

$$p_1 = 2 \iff q_1 = 2, q_2 = 3$$

Άρα, $\alpha = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \cdot q_1^{k_1'} \dots q_e^{k_e'} =$
 $= r_1^{\lambda_1} \dots r_m^{\lambda_m}$, $\mu \in \{1 < r_1 < \dots < r_m \text{ πρώτοι}\}$
 και $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{N}^*$

Ανλ. έδω τα r_i είναι κάποιοι p_i ή q_j
 και οι αντίστοιχοι λ_i και k_t ή k_s ή $k_t + k_s$

Έστω ότι $\alpha = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} = p_1'^{k_1'} \dots p_e'^{k_e'}$

δύο διαφορετικές αναπαράστάσεις σε πρώτους

Εξετάσουμε τον $p_1^{k_1}$. Αν υπάρχει $p_1' = p_1$, τότε

θα πρέπει να οι αντίστοιχοι να είναι οι ίδιοι: $k_1 = k_1'$

Διαφορετικά, εάν $k_1 < k_1'$ θα έχουμε

$$\frac{p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}}{p_1^{k_1}} = \frac{p_1'^{k_1'} \dots p_e'^{k_e'}}{p_1^{k_1}}$$

Το 1° μέλος δεξιών δεν διαιρείται από το p_1

γιατί τον απλοποιήσαμε. Το 2° όμως, διαιρείται

γιατί $k_1' > k_1$. Άρα αυτό έχει $p_1^{k_1' - k_1}$. Αδύνατον

Αυτό ισχύει $\forall$ πρώτο. Άρα, οι πρώτοι θα

είναι ίδιοι με τις αντίστοιχες (σε δυνάμεις)

και έτσι $n = e$

πχ

$$756 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 189 = 2^2 \cdot 3 \cdot 63 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 7 =$$

$$= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$